

Trigonometric calculation of geographic latitude and longitude using the parallactic angle. The methods of González Aveño (1883), Dozier (1949), and Rueda (1998)

Gabriel Pintos Amengual

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9262-9786>

Universitat Oberta de Catalunya

*Corresponding Author: Gabriel Pintos Amengual

DOI: [10.5281/zenodo.15803550](https://doi.org/10.5281/zenodo.15803550)

ABSTRACT	Article History
<i>Throughout the history of astronomy, many researchers tried to solve the problem of the geographical location of a point on the Earth's surface, by observing two or more stars, through analytical procedures. In 1883 González Aveño devised a mathematical algorithm that solved what he called the "Douwes problems" through the resolution of three spherical triangles. Starting from the same principle, other authors have developed astronomical positioning models with the same characteristics. For this reason, we analyze the selected methods, to know their evolution, originality and if these are included in Nautical Education in Spanish Universities. Finally, we detected that, despite the time elapsed between the appearance of each algorithm, this has not influenced its development, that the most efficient and advanced method is that of Rueda and that none of them appear in the study plans.</i> Keywords: González Aveño; Dozier; Rueda; position astronomy; parallactic angle.	Original Research Article
	Received: 24-06-2025
	Accepted: 03-07-2025
	Published: 04-07-2025
	Copyright © 2025 The Author(s): This is an open-access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC BY-NC) which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium for non-commercial use provided the original author and source are credited.
	Citation: Gabriel Pintos Amengual (2025), Trigonometric calculation of geographic latitude and longitude using the parallactic angle. The methods of González Aveño (1883), Dozier (1949), and Rueda (1998). UKR Journal of Arts, Humanities and Social Sciences (UKRJAHSS),1(3),11-23.
	

Introducción

La necesidad de realizar viajes alejados de la costa, a causa de la política de expansión practicada en la Edad Moderna por España y Portugal, conllevó un cambio profundo en los sistemas de posicionamiento utilizados en la mar hasta entonces. La navegación intuitiva, apoyada por el conocimiento del medio por donde navegaba habitualmente el piloto, ya no era suficiente, debido a que las nuevas rutas se hacían fuera de la vista de la costa y, como única referencia, el cielo. Por lo que los métodos tradicionales de posicionamiento, basados en referencias de puntos conspicuos de la costa, la sonda, el color del mar, etc., ya no eran

suficientes. En consecuencia, se tuvo que recurrir a la astronomía para determinar la posición en la que se encontraba el buque. Para la realización de los viajes oceánicos, fue imprescindible que los pilotos se familiarizaran con la utilización de los astros y los instrumentos de tomar alturas como medio para obtener las coordenadas geográficas en donde se encontraba el buque. La ciencia del momento solo permitía calcular la latitud por altura de la Estrella Polar y por altura meridiana del Sol. Así, los métodos de posicionamiento fueron evolucionando; al principio las coordenadas geográficas se determinaban de forma independiente. Para calcular la latitud fuera del meridiano se desarrollaron métodos gráficos mediante

esferas, entre otros, por dos observaciones de Sol: Núñez (1537) (García Franco, 1947, vol. 1, p. 182), por tres observaciones de Sol García de Céspedes (García de Céspedes, 1606, fol. 30 verso - 32 verso); por medio de un procedimiento sobre un plano: Collins (1659) y Leadberters (1729); por métodos ingeniosos: el Padre Pézenas (1741) y Maupertuis (1744) (García Franco, 1947, vol. 1, p. 192). Según Ibáñez (2001, p. 107), Nicolás Fatio de Duillier (1728) fue el primero que propuso un método de forma analítica. Sin embargo, la laboriosidad y dificultad de realizarlos no posibilitaron su práctica en la mar. En 1740, Douwes, partiendo de la latitud estimada como dato, dividió el problema en dos partes: primero determinó el horario; en la segunda parte obtenía la latitud empleando de nuevo la de estima y el horario calculado, así, de forma iterativa, encontraba la altura meridiana considerando exacta la latitud estimada (García Franco, 1947, vol. 1, pp. 193-195). Este método fue desarrollado por Mendoza (1807), Delambre (1815, 1820), Du Bourguet (1820) y Sánchez Cerquero (1823). Las investigaciones tendentes a resolver el cálculo simultáneo de la latitud y la longitud observadas, a partir de ese momento, siguieron otros derroteros. En 1843, el capitán Sumner publicó su descubrimiento consistente en el cálculo de la posición del buque mediante dos observaciones simultáneas o no: “Sumner acababa de descubrir, en intuición maravillosa, el método de los lugares geométricos para situarse en la mar” (García Franco, 1947, vol. 2, p. 194), con lo que inició la “Nueva navegación astronómica” (Ricart, 1895). Este método geométrico-analítico sirvió de fundamento para trazar las rectas de altura. Marcq Blond de Saint-Hilaire, en 1875, ideó el método del punto en el que la recta de altura se obtenía sin la limitación de circunstancias favorables de la observación. Mientras tanto, González Aveño, en 1883, dio solución al “problema de Douwes” al idear un algoritmo matemático capaz de calcular la latitud y longitud por medios analíticos. Como quedó patente en el escrito que le mandó al entonces ministro de Marina en el que le trasladaba su hallazgo en los siguientes términos: “Tengo la satisfacción de participar á V.E. haber encontrado la solución exacta del problema de Douwes” (González Aveño, 1883, VIII). Aun habiéndose comprobado su exactitud, este método no fue de aplicación entre los marinos. Quizás haya que buscar las razones en los motivos que expone José Ricart al desaconsejar la utilización de los métodos analíticos, haciendo referencia a las diferentes situaciones en las que se puede encontrar el buque en navegación y a la dificultad que puede resultar, en determinadas ocasiones, ponerse a calcular

operaciones matemáticas, buscar logaritmos, etc.: “Este es el motivo, muy poderoso por cierto, porque opinamos y aconsejamos a los marinos que usen, siempre que se presente ocasión, los procedimientos gráficos con preferencia a los numéricos.” (Ricart, 1895, p. 8). Continuando con el mismo autor, sobre la utilización de los métodos trigonométricos a bordo, comenta que solo eran aplicados por marinos ilustrados, mientras que eran desacreditados por los marinos más prácticos “por la sencilla razón de no saber trigonometría la mayoría de ellos”, para acto seguido reconocer que el dominio de la trigonometría de los actuales marinos, junto a unos adecuados instrumentos de observación, hacía factible resolver el cálculo de la longitud y latitud por métodos analíticos dando resultados exactos, sin que supusiese un mayor trabajo que empleando el método de Sumner (Ricart, 1895, pp. 25-26). En cuanto a la exactitud del método analítico, Ramón Estrada, en su obra titulada Lecciones de navegación, en el apartado 331 dedicado al cálculo de la latitud y la hora por la observación de dos astros por el método analítico, expone que “Estos métodos directos, si bien son los más exactos, se usan muy poco, en el día, por los navegantes, excepto en ciertos casos particulares que como veremos, reúnen á su exactitud la ventaja de ser más breves.” (Estrada, 1885, p. 615). A pesar de estar demostrada la exactitud de los métodos trigonométricos y confirmada por las afirmaciones realizadas en sus textos por Ramón Estrada (1885) y José Ricart (1895), el extraordinario hallazgo de González Aveño (1883), que de forma analítica y en ausencia de la situación estimada permitía conocer las coordenadas exactas de un punto de la superficie terrestre, no ha dado lugar a trabajos que se ocupen de analizar los métodos trigonométricos para calcular simultáneamente la latitud y longitud. Y es ahí donde radica la importancia de este trabajo. Por ello, el objetivo general de esta investigación es analizar los métodos de posicionamiento astronómico de forma analítica y aplicables a bordo de los buques, delimitado cronológicamente entre 1883 y 2022. Con los siguientes objetivos específicos:

OE1: Describir los métodos utilizados.

OE2: Conocer su evolución.

OE3: Verificar su originalidad.

OE4: Comprobar su inclusión, o no, en las Guías Didácticas de la Carrera de Náutica que se imparten, en la actualidad, en las distintas Universidades españolas.

Materiales y método

Para conseguir los objetivos propuestos, se ha realizado una búsqueda selectiva entre los textos de Astronomía Náutica y Navegación, artículos técnicos (matemáticas), revistas de temática náutica y tesis doctorales, que incluyesen métodos de posicionamiento astronómico por dos o más astros resueltos de forma analítica y en ausencia de la situación estimada, entre los cuales hemos encontrado, los de:

- González Aveño, Miguel (1883), *Compendio de Navegación Astronómica*.
- Estrada, Ramón (1885), *Lecciones de navegación*.
- José Ricart (1895), *Nueva navegación astronómica en los buques rápidos*.
- Dozier, Charles T. (1949), “A simultaneous two star fix”.
- Ruiz, José Ignacio (1976), “Enrique Uribe White y la Astronomía de Posición en el mar” (1952).
- Sevilla, Miguel (1979), “Determinación de la latitud y la longitud por el método de alturas iguales”.
- Sevilla, Miguel (1980), “Determinación de la latitud y la Longitud por fotografías cenitales de estrellas”.
- Rueda Espinés, José (1998), *Evolución de la navegación y situación astronómica hasta nuestros días. Métodos del autor*.
- Pita Porta, Antonio Francisco (2003), *La hipérbole esférica en la navegación astronómica, recta diferenciométrica, verdadera naturaleza de la bisectriz de altura*.
- Mederos, Luis (2020), *Navegación Astronómica*.

De los trabajos enumerados se han descartado los de: Estrada (1885), ya que solo da una idea general del cálculo de la latitud sin exponer la preparación de las fórmulas trigonométricas para su cálculo, pese a que, como hemos comentado anteriormente, lo considera el método más exacto; José Ricart (1895), por resolver los cálculos mediante el método del llamado problema del cuadrilátero esférico, que en esos momentos ya estaba en desuso; Uribe-White (1952), por lo aparatoso del instrumento de observación que propone y por no disponer del algoritmo que resuelve el cálculo; los de Sevilla (1979, 1980), por los instrumentos de observación y computación propuestos, que los hacen impracticables a bordo. También se han ocupado de

este tema Pita (2003, pp. 346-347), que en su tesis doctoral trata de la recta diferenciométrica, introduce un epígrafe titulado “EL MÉTODO DE DOWES”, con parecido desarrollo y utilización de expresiones a la empleada por Rueda (1998); lo mismo ocurre con el procedimiento empleado por Mederos (2020, pp. 307-311), en el epígrafe titulado “Navegación astronómica sin situación de estima”, por lo que no los incluimos en el análisis realizado en este trabajo. De los métodos descritos anteriormente, se han seleccionado para su análisis los de González Aveño (1883), Dozier (1949) y el de Rueda (1998), por considerar que son las tres versiones del método trigonométrico que mejor se adaptan para ser utilizados en las observaciones realizadas a bordo de los buques.

A fin de comprobar la inclusión o no en los programas de los Estudios de Náutica que se imparten en las universidades españolas, de alguno de los modelos de posicionamiento seleccionados, se han revisado las guías docentes del Grado en Náutica y Transporte de las siguientes universidades:

- Universidad del País Vasco (UPV/EHU): Escuela de Ingeniería de Bilbao, Portugalete¹.
- Universidad de Cantabria (UC): Escuela Técnica Superior de Náutica².
- Universidad de Oviedo (UNIOVI): Escuela Superior de la Marina Civil³.
- Universidad de A Coruña (UDC): Escuela Técnica Superior de Náutica y Máquinas⁴.
- Universidad de Cádiz: Escuela de Ingenierías Marina, Náutica y Radioelectrónica⁵.
- Universidad Politécnica de Cataluña: Facultad de Náutica de Barcelona⁶.
- Universidad de la Laguna (ULL): Escuela Politécnica Superior de Ingeniería⁷.

Para realizar el análisis de los trabajos seleccionados, se tuvo en cuenta los modelos de valoración y comparación de textos matemáticos, entre los que destacan los de Schubring, acerca de la metodología y análisis de textos de matemáticas; Ibáñez y Llombart, sobre una propuesta metodológica para la valoración de los textos de Náutica; los de Monterrubio y Ortega, sobre un modelo de valoración de textos matemáticos;

¹ <https://www.ehu.es/es/web/graduak/grado-nautica-y-transporte-maritimo/creditos-y-asignaturas>

² <https://web.unican.es/centros/nautica/estudios-de-grado/grado-en-ingenieria-nautica-y-transporte-maritimo>

³ <https://www.uniovi.es/estudia/grados/ingenieria/nautica>

⁴ <https://estudios.udc.es/es/study/detail/631G01V03>

⁵ <https://asignaturas.uca.es/asig/?titulo=1414>

⁶ <https://www.fnb.upc.edu/es/content/grado-en-n%C3%A1utica-y-transporte-mar%C3%ADtimo>

⁷ https://www.ull.es/apps/guias/guias/view_degree/633/

y los de Picado y Rico, sobre el análisis de contenidos en textos históricos de matemáticas. De los diferentes métodos tratados para analizar los textos, se ha utilizado el propuesto por Ibáñez y Llombart, en lo que se refiere a los contenidos concretos, al tratarse de una metodología elaborada expreso para textos de Náutica. Por último, se ha realizado un análisis de los diferentes métodos trigonométricos utilizados por los autores para el cálculo de la latitud y longitud de forma analítica. Para lo cual, se ha seguido la línea de investigación del contenido de los textos de Náutica, que permite rastrear la difusión de nuevas ideas o teorías científicas y que, al ser comparadas diacrónicamente, posibilitan, a la vez, establecer la evolución de este método de posicionamiento astronómico en la mar y, a través de las guías didácticas, permiten constatar si se imparten estos métodos en la Enseñanza Náutica en las universidades.

Resultados y discusión

Cada autor difundió el resultado de su investigación en un formato diferente: González Aveño lo hizo a través del libro *Compendio de navegación astronómica*; Dozier mediante la publicación del artículo *A simultaneous two-star fix* y Rueda en su tesis doctoral, defendida en la Universidad del País Vasco, titulada *Evolución de la navegación y situación astronómica hasta nuestros días: métodos del autor*. Lo que les mereció el reconocimiento implícito por su difusión y el explícito en cada caso, así: González Aveño por este trabajo y otros, que hemos descrito anteriormente, fue reconocido internacionalmente; Dozier, su método fue publicado en la revista científica del Institute of Navigation de 1949 e incluido en el *American practical navigator an epitome of navigation* de 1962 en el capítulo XXI titulado *Comparison of various methods of sight reduction*; Rueda, antes de defender su tesis doctoral en la Universidad del País Vasco en 1998, expuso su método a personalidades destacadas de la Astronomía Náutica y Navegación y de la Astronomía en general, entre los que destacamos los realizados a Ángel de Urrutia y Landaburu capitán de la marina mercante, profesor numerario de Astronomía Náutica y Navegación y director de la Escuela Oficial de Náutica de Barcelona (1958-1986) y a la Dra. Josefina F. Ling, profesora titular de Astronomía y Astrofísica de la Universidade de Santiago de Compostela. Ambos refrendaron el meritorio método. Urrutia con su apoyo y soporte teórico, y la Dra. Ling mediante el reconocimiento escrito, después de haber analizado el método, en carta que fecha el 24 de julio de 1997, se expresa de esta forma “permítame

felicitarle por el desarrollo de un método analítico, tan elegante, para la determinación de la situación de un punto sobre la superficie de la Tierra a partir de observaciones astronómicas” (Ling, 1997, carta). Por otra parte, señalar la difusión que hace de este método La Escuela Náutica de Catalunya, especializada en la formación para la obtención de títulos de náutica deportiva, abre su página web con una exposición detallada del método de Rueda (1998), concluyendo con un reconocimiento explícito: “Nuestro respeto y consideración al Capitán Rueda por su enorme aportación a la navegación astronómica.”⁸

Cobertura temática

Los tres autores analizados plantearon su algoritmo matemático partiendo de tres triángulos esféricos, formados por: Triángulo 1. La posición de los dos astros y el polo elevado; Triángulo 2. La posición de los dos astros y el zenit; Triángulo 3. La posición de uno de los astros, el zenit y el polo elevado (ver figura 1) y por otra parte la aplicación de la trigonometría esférica, conocidos el horario en Greenwich, la declinación y la altura de los astros observados, a partir de ahí calculan el resto de elementos de los tres triángulos esféricos.

⁸ <https://www.enc.es/el-angulo-paralactico-del-capitan-rueda/>. Véase: los artículos publicados en esa web por Ignacio García el 11 de febrero de 2016, con el título de “El ángulo paraláctico del Capitán Rueda” y el del 29 de diciembre de 2018, con el título de “El ángulo paraláctico: otra vuelta de tuerca”.

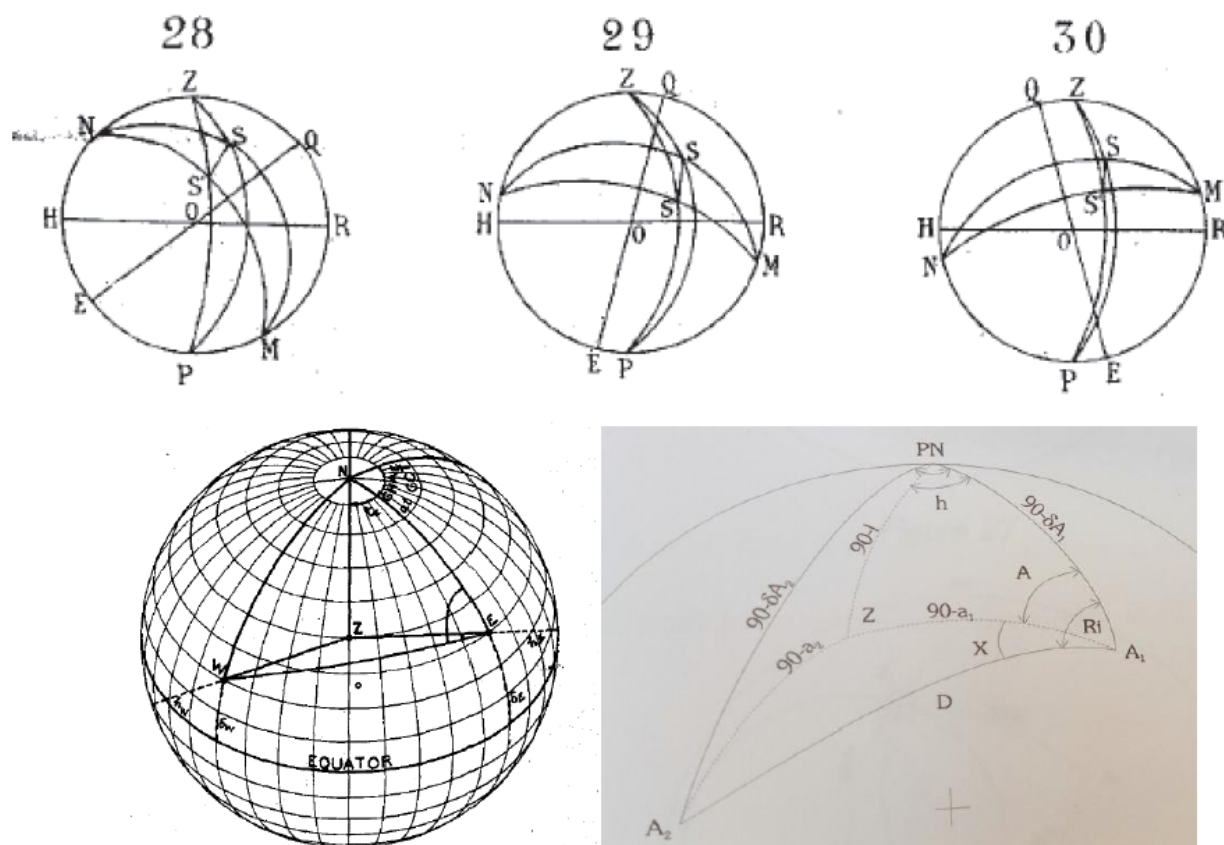


Figura 1. Ilustraciones utilizadas por los autores (de izquierda a derecha y de arriba abajo: González Aveño, Dozier, Rueda) para la determinación de la latitud y longitud. Fuente: González Aveño, 1883; Dozier, 1949; Rueda, 1998.

Los autores coinciden en fundamentar su método en: el ángulo paraláctico; la resolución de tres triángulos esféricos; la posibilidad de que las observaciones sean simultáneas, González Aveño (1883) y Rueda (1998) además añaden la posibilidad que no sean simultáneas. En cuanto al ángulo paraláctico, debemos resaltar que, en los tratados de Astronomía Náutica y Navegación, con frecuencia se puede leer que no se usa en esa disciplina. Así se manifiestan al respecto, entre otros, los siguientes autores: Bowditch (1962, p. 395) “The parallatic angle (X) (sometimes called the position angle), wich is not generally used by the navigator”; Moreu y Martínez (1987, vol.1, p. 74) dicen “El ángulo paraláctico (A) no interesa conocerlo en Astronomía Náutica”; Urrutia (s/f, p. 17) “A ángulo llamado de posición o paraláctico, PAZ, que no se considera casi nunca”; Ibáñez (2016, p. 44) “A: ángulo paraláctico, este último de menor importancia para la navegación astronómica”. Fieles a su exposición, no proponen la resolución de problemas en los que se incluya la del ángulo paraláctico. A pesar de lo expuesto en los tratados de Astronomía Náutica sobre

el ángulo paraláctico, como veremos este ha sido fundamental a la hora de construir el algoritmo matemático para determinar la posición geográfica del buque mediante la observación de dos astros.

El análisis de los tres modelos de cálculo de la latitud y la longitud permite establecer una clasificación diferenciada en función del enfoque teórico adoptado. Así, tanto González Aveño (1883) como Rueda (1998) fundamentan sus propuestas en la teoría de las circunferencias de alturas iguales, evidenciando una coincidencia en la concepción geométrica del posicionamiento astronómico. Por su parte, el modelo desarrollado por Dozier (1949) se distancia metodológicamente al tratar el problema desde un planteamiento estrictamente trigonométrico, lo que pone de manifiesto la diversidad de aproximaciones existentes en la resolución analítica de la localización geográfica.

González Aveño en el *Compendio de navegación astronómica* de 1883, publicado con el objeto de dar a conocer a los navegantes la solución exacta del capital problema de Douwes, señala la inexactitud por la falta

del punto determinado al medio día, unido a la creciente velocidad que iban alcanzando los buques. A pesar de que destacados autores habían acometido el cálculo de la latitud por dos Alturas extrameridianas del Sol y el intervalo de tiempo transcurrido entre observaciones “problema de Douwes”, como: Mendoza y Ríos; Delambre; Sánchez Cerquero, este seguía sin resolver.

Antes de adentrarse en la solución exacta del “problema de Douwes” describe el fundamento de la solución aproximada mediante el auxilio de un trazado gráfico, su aplicación a la práctica mediante el método de Oginaga, que lo descarta por no ser exacta la solución que da, de ahí pasa al método de Sumner⁹, del que considera que ofrece una solución condicional pero útil en algunas ocasiones y a la conversión en línea quebrada de la cuerda del arco del paralelo de alturas, método más largo que el anterior y de igual características.

En relación con la obtención exacta de la posición mediante el cálculo, se distinguen tres casos, siendo el primero aquel en que se conoce la especie de la latitud; para este supuesto, González Aveño (1883) desarrolla siete fórmulas trigonométricas. A diferencia de los tratadistas que le antecieron, no consideraba indispensable que se diesen condiciones favorables para calcular la latitud. En cuanto a la longitud, entendía que su determinación podía posponerse en caso de que las observaciones de altura no hubiesen sido realizadas en circunstancias propicias. El estudio concluye con una enumeración crítica de los errores cometidos sobre este problema por diversos tratadistas náuticos, entre ellos: Ciscar, Fernández Duro, Sánchez Cerquero, Terry, Quijano, Fernández Fontecha, E. P. Dubois, V. Caillet, Lalande y Roper. El segundo y tercer caso los dedica en las que el navegante se encuentra en las inmediaciones del ecuador y cuando el astro culmina próximo al zenit.

Dozier (1949) propuso un método de determinación de la posición basado en la observación simultánea de dos astros y la resolución de dos triángulos esféricos. Sin embargo, debido a la falta de tablas publicadas que permitieran conocer la distancia entre dichos astros, recurrió a un tercer triángulo auxiliar. El primero está definido por los dos astros y el polo elevado; el segundo, por los mismos astros y el cenit; y el tercero, por uno de los astros, el polo elevado y el cenit. A partir de la resolución sucesiva de seis ecuaciones trigonométricas, el autor calcula la latitud y longitud del observador. Para efectuar las observaciones

simultáneas, Dozier sugiere el uso de un sensor estelar sobre una plataforma estabilizada o, alternativamente, un doble sextante. Asimismo, plantea la conveniencia de elaborar tablas con las distancias entre pares de estrellas y los ángulos comprendidos entre el polo y cada uno de los dos astros, con el fin de resolver por procedimientos trigonométricos el resto de las ecuaciones implicadas. No obstante, el autor no incluye ejemplos prácticos que verifiquen la validez de su propuesta.

Rueda (1998) desarrolla un método para determinar la latitud y la longitud geográfica de un punto sobre la superficie terrestre, basándose en la teoría de las circunferencias de alturas iguales. En su propuesta, describe detalladamente el procedimiento aplicable a distintos casos particulares y aborda la ambigüedad que puede surgir cuando dichas circunferencias se cortan en dos puntos —excepto cuando son tangentes—, proponiendo como solución elegir la intersección más próxima a la posición estimada del buque o, alternativamente, utilizar los acimuts observados en el momento de la toma de datos, lo que permite discernir cuál de las dos posibles ubicaciones corresponde a la real.

A partir de esta base geométrica, fundamenta su modelo en las fórmulas esenciales del triángulo esférico empleadas en astronomía de posición. El conocimiento de las coordenadas del astro observado permite, en consecuencia, identificar las coordenadas del llamado polo de iluminación o punto astral. Sobre esta equivalencia construye un método de posicionamiento astronómico que admite la observación simultánea o no de dos astros, previa determinación del ángulo paraláctico de uno de ellos. A lo largo de su exposición teórica, Rueda intercala múltiples ejemplos aplicados a condiciones reales de navegación, lo que permite validar empíricamente tanto la utilidad como la precisión del modelo que propone.

⁹ El método de Sumner considerado “la iniciación de una nueva era en la Navegación Astronómica” por Maury jefe del Servicio Hidrográfico de Washington (García Franco, 1947, vol.2, p. 135).

Planteamiento de las ecuaciones trigonométricas

Los autores formulan las ecuaciones trigonométricas correspondientes a los tres triángulos esféricos, siguiendo la nomenclatura indicada en la tabla 1.

Autor	Triángulo 1	Triángulo 2	Triángulo 3
González Aveño	En el triángulo SNS' $\text{Datos} \begin{cases} \Delta = NS \\ \Delta' = NS' \\ \Pi = SNS' \end{cases}$ $\text{Incógnitas} \begin{cases} SS' \\ SS'N = Y \end{cases}$	En el triángulo SZS' $\text{Datos} \begin{cases} \alpha = ZS \\ \alpha' = ZS' \\ p = \frac{\alpha + \alpha' + s}{2} \end{cases}$ $\text{Incógnita} \{SS'Z = Y\}$	En el triángulo $NS'Z$ $\text{Datos} \begin{cases} Y'' \\ \alpha' = ZS' \\ \Delta' = NS' \end{cases}$ $\text{Incógnitas} \begin{cases} \varphi = \text{latitud} \\ H_o = \text{Horario occidental del Sol} \end{cases}$
Dozier	En el triángulo ENW $\text{Datos} \begin{cases} d_E \\ d_W \\ ENW \end{cases}$ $\text{Incógnitas} \begin{cases} EW \\ NEW \end{cases}$	En el triángulo ZEW $\text{Datos} \begin{cases} h_E \\ h_W \\ EW \end{cases}$ $\text{Incógnitas} \{X\}$	En el triángulo NEZ $\text{Datos} \begin{cases} h_E & d_E \\ h_W & d_W \\ A \end{cases}$ $\text{Incógnitas} \begin{cases} l_o = \text{latitud} \\ p = \text{Horario} \end{cases}$
Capitán Rueda	En el triángulo A_1PA_2 $\text{Datos} \begin{cases} d_1 = A_1P \\ d_2 = A_2P \\ h = A_1PA_2 \end{cases}$ $\text{Incógnitas} \begin{cases} D_o = A_1A_2 \\ R = \text{Rumbo} \end{cases}$	En el triángulo A_1ZA_2 $\text{Datos} \begin{cases} a_1 = A_1Z \\ a_2 = A_2Z \\ D_o = A_1A_2 \end{cases}$ $\text{Incógnitas} \begin{cases} X = A_2A_1Z \\ A = \text{Paraláctico} \end{cases}$	En el triángulo A_1ZP $\text{Datos} \begin{cases} a_1 = A_1Z \\ d_1 = A_1P \\ A = \text{Paraláctico} \end{cases}$ $\text{Incógnitas} \begin{cases} l_o = \text{latitud} \\ L = \text{Longitud} \end{cases}$

Tabla1. Nomenclatura utilizada por los autores. Fuente elaboración propia

En el triángulo 1 compuesto por la posición de los dos astros y el polo elevado, los tres autores a partir de la declinación de cada astro y la diferencia de horarios en Greenwich entre ellos como datos fundamentales, calculan la distancia esférica que los separa y el ángulo. A estas dos incógnitas Rueda (1998) las denomina Distancia ortodrómica y Rumbo ortodrómico.

Para el cálculo de la distancia esférica entre los dos astros: González Aveño (1883) para calcular ($S S'$), prepara la fórmula de los cosenos para el cálculo logarítmico mediante la consideración de un ángulo auxiliar, en este caso x , perteneciente al primer o segundo cuadrante. Dozier (1949) para el cálculo de la distancia entre los astros (EW) utiliza directamente la fórmula de los cosenos pudiéndose aplicar bien por una calculadora científica o por el método binómico, en cuyo caso se necesitan tres tipos de tablas distintas: trigonométricas logarítmicas, logarítmicas de números

y trigonométricas naturales. Rueda para calcular la distancias entre A_1A_2 aplica también la fórmula de los cosenos.

Para el cálculo del ángulo (Y) ($A \pm X$) (R). González Aveño (1883) utiliza la fórmula de las cotangentes preparadas para el cálculo logarítmico; Cuando el intervalo entre observaciones de Sol es pequeño hace $\Delta = \Delta'$, e iguales a la intermedia entre las dos, NSS' es isósceles para hallar s y Y en lugar de las fórmulas 1, 2 y 3 emplea: $\text{sen } \frac{1}{2} s = \text{sen } \Delta \text{sen } \frac{1}{2} \Pi$; $\cot = \cos \Delta \tan \frac{1}{2} \Pi$. Cuando la observación sea por dos astros diferentes Π estará representado por la diferencia entre las ascensiones rectas de los astros observados. Dozier (1949) contempla dos escenarios, en el primer caso lo calcula mediante la fórmula de los senos, pero si existe duda sobre el cuadrante al que pertenece propone la fórmula de las cotangentes. Rueda (1998) utiliza la fórmula de las cotangentes.

Autor	Cálculo de la distancia	Cálculo ángulo (Y) (A ± X) (R)
González Aveño	Triángulo SNS' $\tan x = \tan \Delta \cos \Pi \quad (1)$ $\cos s = \frac{\cos \Delta \cos \Pi \cos (\Delta' - x)}{\cos x} \quad (2)$	Triángulo SNS' $\cot Y = \frac{\cot \Pi \sin (\Delta' - x)}{\sin x} \quad (3)$
Dozier	En el triángulo ENW $\cos D_o = \sin d_E \sin d_W + \cos d_E \cos d_W \cos \text{ENW} \quad (1)$	En el triángulo ENW $\sin (A \pm X) = \frac{\sin \text{ENW} \cos d_W}{\sin D_o} \quad (2)$ En el caso que el cuadrante del ángulo (A ± X) está en duda, se sugiere la siguiente fórmula para reemplazar (2): En el caso que el cuadrante del ángulo (A ± X) está en duda, se sugiere la siguiente fórmula para reemplazar (2): $\cot (A \pm X) = \frac{\cos d_E \tan d_W - \sin d_E \cos \text{ENW} \tan h}{\sin \text{ENW}} \quad (2A)$
Capitán Rueda	En el triángulo A₁PA₂ $\cos D_o = \sin d_1 \sin d_2 + \cos d_1 \cos d_2 \cos h \quad (1)$	En el triángulo A₁PA₂ $\cot R = \cos d_1 \left(\frac{\tan d_2}{\sin h} \right) - \left(\frac{\tan d_1}{\tan h} \right) \quad (2)$

Tabla 2. Ecuaciones para el cálculo de (Y) (A ± X) (R). Elaboración propia con datos obtenidos de: González Aveño, 1883; Dozier, 1949; y Capitán Rueda (1998).

En el triángulo esférico formado por los dos astros y el cénit (Triángulo 2), el cálculo del ángulo Y' (X) es esencial para determinar el ángulo paraláctico. González Aveño (1883) propone resolver este triángulo aplicando la fórmula del ángulo mitad, diseñada para facilitar los cálculos logarítmicos a partir de las analogías de Delambre-Gauss, utilizando un ángulo auxiliar x. Una vez hallado el valor de Y' mediante este procedimiento, deduce el ángulo paraláctico Y''.

En cambio, autores como Dozier (1949) y Rueda (1998) optan por otro enfoque: ambos emplean la fórmula de los cosenos para determinar el ángulo X. Sin embargo, divergen al calcular el ángulo paraláctico:

- Dozier (1949) utiliza la fórmula A = (A ± X) ± X, introduciendo X de forma repetida,
- Rueda (1998), por su parte, propone una expresión más directa: A = R - X.

Autor	Cálculo de X
González Aveño	En el triángulo SZS' $\cos \frac{1}{2} Y' = \sqrt{\frac{\text{sen } p \text{ sen } (p-\alpha)}{\text{sen } s \text{ sen } \alpha'}} \quad (4)$ Ángulo paraláctico $Y'' = Y \pm Y'$
Dozier	En el triángulo ZEW $\cos X = \frac{\text{sen } h_W}{\cos h_E \text{ sen } Do} \pm \frac{\tan h_E}{\tan Do} \quad (3)$
Capitán Rueda	En el triángulo A_1ZA_2 $\cos X = \frac{\text{sen } a_2 - \text{sen } a_1 \cos Do}{\cos a_1 \text{ sen } Do} \quad (3)$

Tabla 3. Ecuaciones para el cálculo de (X). Fuente: Elaboración propia con datos obtenidos de: González Aveño (1883), Dozier (1949) y Rueda (1998).

Cálculo del ángulo paraláctico en los tres modelos:

$Y'' = Y \pm Y'$ (González Aveño, 1883)

$A = (A \pm X) \pm X$ (Dozier, 1949)

$A = R - X$ (Rueda, 1998)

Triángulo 3: Formado por la posición de uno de los astros, el cénit y el polo elevado, para el cálculo de la latitud autores como González Aveño (1883), Dozier (1949) y Rueda (1998) lo abordan a partir de este triángulo esférico. Todos emplean la fórmula de los cosenos, aunque con matices en su aplicación. Mientras que, González Aveño (1883) introduce un

ángulo auxiliar como paso intermedio en el desarrollo de la fórmula, Dozier (1949) y Rueda (1998) aplican la fórmula de los cosenos de manera directa, sin recurrir a elementos auxiliares.

Cálculo de la longitud. González Aveño (1883) y Rueda (1998) para el cálculo del ángulo en el polo utilizan la fórmula de las cotangentes, mientras que Dozier (1949) propone la de los senos y en caso de que el horario ofrezca duda sugiere utilizar la de las cotangentes. Al igual que para el caso de la latitud González Aveño (1883) lo hace mediante un ángulo auxiliar. A través del horario determinan la longitud $Lo = hGA_1 - hLA_1$.

Autor	Cálculo de la latitud	Cálculo de la longitud
González Aveño	En el triángulo NZN' $\tan x' = \tan \alpha' \cos Y'' \quad (5)$ $\sin \varphi = \frac{\cos \alpha' \cos (\Delta' - x')}{\cos x'} \quad (6):$	En el triángulo NZN' $\cot Ho = \frac{\cos Y'' \sin (\Delta' - x')}{\sin x'} \quad (7)$
Dozier	En el triángulo NEZ $\sin l_o = \sin h_E \sin d_E + \cos h_E \cos d_E \cos A \quad (5)$	En el triángulo NEZ $\sin P = \frac{\sin A \cos d_E}{\cos l_o} \quad (6)$ En el caso que el $\hat{P}$ está en duda, se sugiere la siguiente fórmula para reemplazar (6): $\cot P = \frac{\cos d_E \tan h_E - \sin d_E \cos A}{\sin A} \quad (6A)$ $L = GHA \pm P$
Capitán Rueda	En el triángulo A_1ZP $\sin l_o = \sin a_1 \sin d_1 + \cos a_1 \cos d_1 \cos A \quad (4)$	En el triángulo A_1ZP $\cot P = \frac{\tan a_1 \cos d_1 - \sin d_1 \cos A}{\sin A} \quad (5)$ $L = GHA \pm P$

Tabla 4. Ecuaciones para el cálculo de (l y L). Fuente: Elaboración propia con datos obtenidos de: González Aveño (1883), Dozier (1949) y Rueda (1998).

Planteadas las ecuaciones trigonométricas tanto González Aveño (1883) como Rueda (1998) verifican su modelo a través de varios ejemplos:

González Aveño (1883) resolvió dos ejercicios con resultado satisfactorio, uno sin cambio de posición y el otro habiendo navegado en el intervalo de las observaciones, en este caso también lo hace por el procedimiento que siguen los demás autores resultando una diferencia en latitud de $36'17''$, cantidad inaceptable. Del mismo modo verifica su modelo para dos observaciones de Sol en un pequeño intervalo de tiempo, con un resultado que considera satisfactorio al

dar una diferencia en latitud de $1'28''$.

Rueda (1998) para verificar su modelo resolvió varios casos: con el buque fondeado, situación obtenida por (GPS) lo = $41^\circ 22, 8'N$ y Lo = $02^\circ 11,1'E$, tomó simultáneamente la altura de dos astros y efectuó cinco cálculos para obtener la situación del buque, utilizando en una el ángulo paraláctico y las cuatro restantes la tangente Marcq, empleando diferentes puntos de estima. Con el mismo criterio resolvió los cálculos, esta vez, además del ángulo paraláctico calculó la situación por Johnson y Marcq, con los resultados que se exponen en la tabla.

	1	2	3	4	5
VERDADERA	$I=41^{\circ}22,8'N$ $L=02^{\circ}11,1'E$	$41^{\circ}23,0'N$ $02^{\circ}11,1'E$	$41^{\circ}23,2'N$ $02^{\circ}10,8'E$	$41^{\circ}23,3'N$ $02^{\circ}10,6'E$	$41^{\circ}23,4'N$ $02^{\circ}09,0'E$
VERDADERA	$I=41^{\circ}22,8'N$ $L=02^{\circ}11,1'E$	$41^{\circ}22,8'N$ $02^{\circ}11,3'E$	$41^{\circ}22,9'N$ $02^{\circ}11,0'E$	$41^{\circ}23,5'N$ $02^{\circ}10,6'E$	$41^{\circ}27,5'N$ $02^{\circ}04,0'E$

Tabla 5. Comparación de varios métodos. Fuente: Rueda, 1998, p.277.

En la condición de buque navegando, en tres singladuras diferentes realizó la observación de dos astros para calcular la situación del buque resolviendo por tangente Marcq y por el método del capitán Rueda resultando las diferencias despreciables, en un rango comprendido tanto para la diferencia en latitud como en longitud entre 0,1' y 0,2'.

Según García y López (2004, p. 375), citando a Delambre, el método más corto se relaciona con aquel que requiere el menor número de accesos a las tablas de logaritmos para obtener los valores necesarios, con la particularidad de que solo se contabiliza un acceso cuando se consultan varios valores en una misma hoja. En función de este criterio, consideramos que el método más corto es el de Rueda (13), en comparación con los de González Aveño y Dozier (14). Por lo tanto, podemos considerar que, en este caso, el algoritmo más eficiente es el de Rueda (1998).

Estructuración del contenido

En este apartado hay que destacar tres factores importantes, el periodo en el que están editados los trabajos analizados, el que atañe a la procedencia profesional y el formato en que lo presentaron al que aludimos anteriormente. El trabajo de González Aveño está realizado en el siglo XIX, por otro lado, los de Dozier y el capitán Rueda lo están en el siglo XX. González Aveño y el capitán Rueda, después de su formación náutica como capitanes de la marina mercante y tras un periodo de navegación en buques mercantes dedicaron su vida a la Enseñanza Náutica, ambos como profesores de Astronomía Náutica y Navegación. Mientras que Dozier, durante un tiempo,

también se dedicó a la enseñanza, pero no en esa materia. Los factores enumerados repercuten de la siguiente forma en la estructuración: en cuanto al desarrollo del algoritmo matemático, mientras González Aveño (1883) en las diferentes ecuaciones trigonométricas utiliza el ángulo auxiliar, algo muy frecuente en su época, para preparar su resolución por el método logarítmico. Dozier (1949) y Rueda (1998) no lo utilizan, con lo cual estas pueden resolverse por el método binómico o directamente con una calculadora científica. En lo que respecta a la secuencia de la presentación tanto González Aveño (1883) como Rueda (1998) antes de entrar en materia se ocupan del fundamento teórico, sin embargo, Dozier (1949), quizás sea por el medio en el que lo presenta o su visión sobre que es un problema trigonométrico, lo aborda directamente. En cualquier caso, los tres autores logran difundir su método con claridad. González Aveño (1883) valida su método, con resultado satisfactorio, con tres ejemplos, Rueda (1998) además de validarlo, con cinco ejemplos realizados con buque fondeado y tres navegando, compara las soluciones con las obtenidas con el Global Positioning System (GPS) y la Tangente Marcq Saint-Hilaire, con resultado satisfactorio. Dozier no presenta ejemplos.

Objetividad

No hemos detectado que los autores cometan omisiones, reiteraciones, ni errores. En el caso de González Aveño (1883) no se conocen ediciones posteriores, la tesis doctoral de Rueda (1998) y el artículo escrito por Dozier (1949), por su propia

naturaleza no existen ediciones posteriores. En cuanto a la fiabilidad y exhaustividad, los tres autores fundamentan su método sin acudir a reglas prácticas. El estado de la ciencia, referido a la materia que tratamos, en el tiempo transcurrido entre las tres obras prácticamente no ha influido.

Conclusiones

El análisis comparativo de los modelos de posicionamiento astronómico desarrollados por González Aveño (1883), Dozier (1949) y Rueda (1998) permite extraer varias conclusiones relevantes. En primer lugar, se constata que todos ellos prescinden de la situación estimada y recurren a la utilización de triángulos esféricos formados por los dos astros, el polo elevado y el cenit, figura geométrica ya presente en los tratados de Mendoza, Delambre, Du Bourguet y Sánchez Cerquero.

La estructura algorítmica de cada método difiere en complejidad: González Aveño emplea siete ecuaciones trigonométricas y catorce entradas en tablas; Dozier, seis y catorce, respectivamente; y Rueda, cinco y trece. Este último destaca por presentar un algoritmo completo, de aplicación directa, sin necesidad de fórmulas alternativas ni condicionamientos específicos.

Aunque las fórmulas trigonométricas fundamentales no han variado entre los modelos analizados, el procedimiento de resolución ha evolucionado gracias a los avances tecnológicos, en particular la generalización del uso de calculadoras científicas, que ha suprimido la dependencia de las tablas de logaritmos.

Ninguno de los métodos puede considerarse completamente original, dado que el cálculo de la posición mediante dos observaciones era conocido desde antiguo. No obstante, las aportaciones de González Aveño (1883) —por su propuesta de solución analítica al problema de Douwes— y Rueda (1998) —por la formulación de un algoritmo eficiente, coherente y contextualizado— merecen especial atención.

La escasa adopción del método analítico en la práctica náutica moderna ha sido atribuida a razones pedagógicas y operativas, lo que llevó a la preferencia por los métodos gráficos en los textos técnicos. Sin embargo, el planteamiento de Rueda (1998) demuestra que es posible desarrollar métodos analíticos accesibles, prácticos y adaptados al entorno marítimo.

El examen de las guías docentes de los estudios de Náutica en las universidades españolas revela la ausencia de estos enfoques en los planes formativos

actuales, a pesar de su validación teórica y de la existencia de herramientas tecnológicas que facilitan su aplicación. En consecuencia, se propone la incorporación de los métodos analíticos de posicionamiento astronómico en la Enseñanza Náutica universitaria como una medida necesaria para actualizar y diversificar la formación de los futuros profesionales del mar.

Por último, se considera que la recuperación del concepto de “Nueva navegación astronómica”, acuñado en el siglo XIX, abre una línea de investigación pendiente. Analizar dicha corriente en diálogo con los desarrollos analíticos contemporáneos y las herramientas tecnológicas actuales permitiría evaluar la pertinencia de redefinir este concepto en el contexto de una navegación moderna cada vez más dependiente del Global Positioning System (GPS).

Agradecimientos

Quiero expresar mi sincero agradecimiento al Dr. José Rueda Espinés por la generosa información proporcionada acerca de su modelo de posicionamiento astronómico basado en el ángulo paraláctico, desarrollado en el marco de su Tesis Doctoral (1998). Del mismo modo, valoro profundamente el tiempo que me ha dedicado y la claridad de sus explicaciones, así como las consideraciones compartidas respecto al desarrollo y aplicación de su propuesta. Su disposición y rigor han sido de gran valor para el avance de este trabajo.

REFERENCES

- Bowditch, Nathaniel (1962), *American Practical Navigator*, U.S. Navy Hydrographic Office Washington, Under the authority of the Secretary of the Navy.
- Dozier, Charles T. (1949), “A simultaneous two star fix”, *Institute of Navigation*, vol 2 n° 24.
- Estrada, Ramón (1885), *Lecciones de navegación*, Madrid, Establecimiento Tipográfico, Sucesores de Rivadeneyra.
- García de Céspedes, Andrés (1606), *Libro de instrumentos nuevos de Geometría muy necesarios para medir distancias, y alturas, sin que interuengan numeros como se demuestra en la practica: demas desto se ponen otros tratados, como es vno, de conducir aguas, y otro vna question de artiller*, Madrid, Juan de la Cuesta.
- García Franco, Salvador (1947), *Historia del arte y ciencia de navegar. Desenvolvimiento histórico de los cuatro términos de la navegación*, 2 volúmenes. Madrid,

Instituto histórico de Marina.

García Santiago, Ana y López Sánchez, J.F. (2004), "Delambre, Sánchez Cerquero y los métodos para calcular la latitud", *Historia de las ciencias y de las técnicas* / coord. por Luis Español González, José Javier Escribano Benito, María Ángeles Martínez García, Vol. 1, págs. 369-386.

González Aveño, Miguel (1883), *Compendio de Navegación Astronómica*, Valencia. Imprenta de Nicasio Rius Monfort.

Ibáñez Fernández Itsaso (2000), *La difusión de conocimientos náuticos en la España decimonónica: La navegación astronómica en los textos de náutica españoles del siglo XIX*, (Tesis doctoral), Bilbao, Universidad del País Vasco.

Ibáñez Fernández, Itsaso y Llombart, José (2001). La comparación de textos en historia de la ciencia: Una propuesta metodológica. Llull. *Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas*, 24 (49), 131-148.

Ibáñez, Itsaso (2016), *Navegación Astronómica Compendio y Cálculos*, Bilbao, Universidad del País Vasco.

Ling Ling, Josefina F. (1997), Carta fechada a 24 de julio de 1997 enviada al capitán Rueda.

Mederos, Luis (2020), *Navegación Astronómica*, Madrid, Ediciones Tutor.

Monterrubio, María Consuelo y Ortega, Tomás (2009), Creación de un modelo de valoración de textos matemáticos. Aplicaciones, En González López, María José, González Astadillo, María Teresa y Murillo Ramón, Jesús (eds), *Investigación en Educación Matemática XIII*, Santander; SEIIM, pp. 37-53.

Moreu Curbera, José María; Martínez Jiménez, Enrique (1987), *Astronomía y Navegación*, Vol. 1, Madrid, Hijos de E. Vinuesa, S.L.

Picado, Miguel y Rico, Luis (2011), Análisis de contenido en textos históricos de matemáticas, *PNA*, vol. 6 nº 1, pp. 11-27.

Pintos Amengual, Gabriel (2021), "Evolución del cálculo de la latitud por la altura meridiana incluido en los textos para la formación de los pilotos de la Carrera de Indias en tiempo de los Austrias", *Naveg@merica*. Revista electrónica editada por la Asociación Española de Americanistas, (25). <https://doi.org/10.6018/nav.437651>

Pintos Amengual, Gabriel (2023), *La Transición a La Navegación Astronómica Científica. La formación de los pilotos españoles del siglo XVI al XVIII*, ELIVA BOOKS.

Pita Porta, Antonio Francisco (2003), *La hipérbole esférica en la navegación astronómica, recta diferenciométrica, verdadera naturaleza de la bisectriz de altura*, Tesis doctoral, Universidad de A Coruña. Departamento de Energía y propulsión marítima. Área de Ciencias y Técnicas de la Navegación.

Ricart y Giral, José (1895), *Nueva navegación astronómica en los buques rápidos*, Barcelona, Tipografía L'avenç, Ronda Universidad.

Rueda Espinés, José (1998), *Evolución de la navegación y situación astronómica hasta nuestros días. Métodos del autor*, Tesis Doctoral, Universidad del País Vasco, Departamento de Ciencias y Técnicas de la Navegación, Máquinas y construcciones Navales.

Ruiz, José Ignacio (1976), "Enrique Uribe White y la Astronomía de Posición en el mar", *Sociedad Geográfica de Colombia* nº 109, vol. 30.

Scubring, Gert (1987), On the methodology of analysing historical textbooks, Lacroix as textbook autor, Fort the Learning of Mathematics. Nº 7, pp. 41-51.

Scubring, Gert (1988), Discussions épistémologiques sur le statut des Nombres négatifs et leur représentation dans les muels allemands et français de mathématique entre 1795 et 1845. Actes du premier colloque francoallemand de didactiques des mathématiques et del informatique, Editions La Pensée Sauvage.

Scubring, Gert (1996), Changing cultural and epistemological views on mathematics and different institutional contexts in nineteenth-century Europe. In GOLSTEIN, C. GRAY. J AND RITTER, J, (eds), *L'Europe mathématique Histries mythes identités*, Paris, Editions de la maison des sciences de l'Home, pp. 363-388..

Sevilla, Miguel (1979), "Determinación de la latitud y la longitud por el método de alturas iguales. Programas de cálculo automático", *Boletín de Información* nº 43 del Servicio Geográfico del Ejército.

Sevilla, Miguel (1980), "Determinación de la latitud y la Longitud por fotografías cenitales de estrellas", *Seminario de Astronomía y Geodesia*, publicación 111, Universidad Complutense de Madrid, Facultad de Ciencias Matemáticas. Madrid.

Urrutia y de Landaburu Ángel (s/f), *Astronomía Náutica y Navegación: apuntes [en línea]*. [s.l.]: [s.n.], [19--] [Consulta: 14/11/2023]. Disponible a: <http://hdl.handle.net/2099.4/1228>.